Inégalités
Conseils et Réponses

Règles élémentaires

Allez-y pas à pas. Vous devez, à chaque étape de la résolution, être capable de dire quelle *règle élémentaire de transformation* que vous utilisez, afin de savoir si vous devez ou non changer le sens de l'inégalité.
Attention, car en contrôle, les réponses ne sont pas indiquées, donc n'oubliez pas, de temps à autre, de vérifier par vous-même avant de regarder la réponse. La version complète du cours vous propose une méthode de vérification.

Exercice 1

Vous pouvez « colorier » l'axe des réels pour représenter l'ensemble des solutions, puis transcrire cette représentation en intervalle. Il faudra, au besoin, revoir le chapitre *Les Ensembles*.

a) $]-5\,;\,+\infty[$
b) $]-\infty\,;\,3]$
c) $\mathbb{R}$
d) $\varnothing$
e) $\mathbb{R}$
f) $\varnothing$

Exercice 2

a) $[-1\,;\,+\infty[$
b) $]-\infty\,;\,0\,]$
c) $]1\,;\,+\infty[$
d) $[-15/4\,;\,+\infty\,[$

Exercice 3

a) $[-4\,;\,+\infty[$
b) $]-\infty\,;\,10\,[$

Inéquations du premier degré

Exercice 4

a) $[2;+\infty[$
b) $\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$
c) $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$
d) $]3;+\infty[$
e) $\left[-\dfrac{1}{12};+\infty\right[$
f) $\left]-\infty;-\dfrac{4}{3}\right]$

Exercice 5

a) $]-\infty;-3]$
b) $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]$

Exercice 6

Cet exercice sert à mettre à l'épreuve votre compréhension de la notion de *solution* d'une inéquation.

a) $\mathbb{R}$
b) $\varnothing$
c) $\mathbb{R}$

Exercice 7

Cet exercice sert à préparer l'étude des inéquations du second degré. Prenez le temps de réfléchir avant de calculer. Pensez aussi à chercher dès le début les éventuelles « valeurs interdites ».

$]2\,;\,+\infty[$

Petits « systèmes » d'inéquations à une seule inconnue.

Exercice 8

Là encore, cet exercice prépare l'étude du second degré. Le « et » et le « ou » sont des *connecteurs logiques* : ils se placent entre deux affirmations pour en former une nouvelle.

a) $[\,2\,;+\infty\,[$
b) $[\,1\,;+\infty\,[$
c) $\varnothing$
d) $]-\infty\,;1\,]\cup[\,2\,;+\infty\,[$
e) $[\,1\,;2\,]$
f) $\mathbb{R}$

Exercice 9

a) $[\,-1/2\,;1\,]$
b) $\mathbb{R}$

Exercice 10

a) $[\,2\,;+\infty\,[$
b) $[\,-1\,;+\infty\,[$

Inéquations du second degré (et autres)

Exercice 11

Idéalement, vous devriez chercher cet exercice avant de lire la partie du cours concernant la méthode de résolution des inéquations du second degré : chercher d'abord par vous-même. Il s'agit au moins autant de réflexion que de calcul. Ne lisez ce qui suit qu'après un ou plusieurs essais. Pensez à vérifier pour quelques valeurs avant de regarder la réponse qui suit.

$]-\infty\,;-3\,]\cup[\,3\,;+\infty\,[$

Si vous n'avez pas trouvé cette réponse, vous pouvez essayer à nouveau, ou bien lire ce qui suit :

- D'abord, comme pour les *équations* du second degré, on fait tout passer à gauche et on factorise.
- Ensuite, vous risquez de commettre l'erreur consistant à croire que $A\times B \geq 0$ équivaut à : $A \geq 0$ ou $B \geq 0$. C'est une erreur prévisible (la preuve…)
- On arrive au cœur absolu du problème, qui se ramène, comme souvent, à un problème de formulation : « ≥ 0 » ne doit pas être lu « est supérieur à zéro », mais « EST POSITIF ».
  Donc, terminez la phrase : un produit (de deux facteurs) est positif si et seulement si …
- …si et seulement si ses facteurs sont tous deux positifs <u>ou</u> tous deux négatifs (c'est la règle des signes du produit de deux relatifs).
- Ensuite, grâce aux « petits systèmes à une seule inconnue » précédemment étudiés, vous pouvez finir l'exercice. Mais il y a plus simple : le <u>tableau de signe</u>. Pour comprendre son fonctionnement, vous pouvez lire la version complète du cours.

Exercice 12

$[\,-1\,;2\,]$

Exercice 13

$]-2\,;1/2\,[$

Exercice 14

$]-\infty\,;-1\,]\cup[1/2\,;2/3]$

Exercice 15

$]\,0\,;1\,[$

Exercice 16

a) $[-1\,;0\,]\cup[1\,;+\infty[$
b) $[1\,;+\infty[\,\cup\,\{0\}$

Exercice 17

$]-1\,;1\,]$

Exercice 18

$]-\infty\,;-1\,]\cup\,]1/2\,;1]$

Exercice 19

a) $[\,2\,;3\,]$

b) $[\,2\,;3\,]$ (On pouvait remarquer que cette équation était équivalente à la précédente.)

c) $[-6\,;3\,[$

Exercice 20

Ce sont des cas nouveaux. Il s'agit de réfléchir, au lieu de calculer.

a) $\varnothing$
b) $\mathbb{R}$
c) $\varnothing$
d) $[2\,;+\infty[$. Dans ce dernier cas, l'un des deux facteurs change de signe et l'autre non.

Exercice 21

$[-3\,;3\,]$
$]-\infty\,;-\sqrt{2}\,]\cup[\,\sqrt{2}\,;+\infty\,[$
$\mathbb{R}$
$\{0\}$
$\{1\}$
$\mathbb{R}$
$[-1\,;3\,]$

Exercice 22

Sont regroupés ici des cas où l'un des facteurs ne change pas de signe (polynôme du second degré non « factorisable »). Nous en rencontrerons d'autres, disséminés dans les exercices qui suivent.

a) $[0\,;+\infty\,[$
b) $]-1\,;1\,[$
c) $]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$

Exercice 23

a) $]-\infty\,;-1]\cup\{0\}\cup[1\,;+\infty[$
b) $[1\,;+\infty[$
c) $]-\infty\,;0]$
d) $\mathbb{R}$

Exercice 24

a) $\mathbb{R}$
b) $[2\,;6\,]$
c) $\varnothing$
d) $]-\infty\,;1\,]\cup[3\,;+\infty[$
e) $[-2\,;5]$
f) $]-\infty\,;1-\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2}\,;+\infty[$

Exercice 25

a) $[-2\,;0\,]$
b) $[-3\,;1\,]$
c) $\mathbb{R}$

Exercice 26

Là encore, tout faire passer du même côté et « factoriser », mais au sens large de mettre au même dénominateur. En effet, la règle des signes de la division des relatifs étant la même que celle de la multiplication, les quotients pourront être traités par des tableaux de signe tout comme l'étaient les produits.
Mettre au même dénominateur est une sorte de factorisation (au sens large).

a) $]-\infty\,;-1]\cup]0\,;1]$
Erreur fréquente : environ un tiers des élèves de seconde multiplient par x les deux membres. Mais c'est une mauvaise idée, car le signe de x varie, donc on ne sait pas si l'on doit ou non changer le sens de l'inégalité. Que faire alors ? Ce qu'on fait presque toujours pour les équations et inéquations qui ne sont pas du premier degré : <u>tout faire passer du même côté et factoriser</u>, de Zeus !
b) $]2/3\,;3/2\,]$
c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
d) $[-1\,;1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[\;=\;[-1\,;+\infty\,[\setminus\{1\}$
e) $]1\,;+\infty[$
f) $]-1\,;-1/2]\cup]0\,;+\infty[$

Exercice 27

Une fois de plus, il vous faut penser à… penser avant de calculer.
a) $\varnothing$
b) $[\,0\,;3\,]$
c) $\mathbb{R}$
d) $]-2\,;2\,[$

Exercice 28

a) $]-\infty\,;-1\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$
b) $]\,0\,;+\infty\,[\setminus\{1\}$

Exercice 29

a) $[-1\,;1]$
b) $]-\infty\,;-1[\cup\{0\}$

Exercice 30

$S = [\,2\,;\,+\infty\,[$

Applications

Exercice 31

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$$

Vous devez savoir mettre $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sous la forme $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ce cas précis est par exemple traité dans le cours <u>et</u> dans les exercices de *Révisions d'Algèbre.*

Exercice 32

$]-\infty;1]$

Exercice 33

a) $[0;1]$
b) $[1;+\infty[$

Exercice 34

On augmente la valeur d'une écriture fractionnaire en ajoutant un même nombre à son numérateur et à son dénominateur si et seulement si <u>son dénominateur est strictement supérieur à son dénominateur</u>.

Inéquations supplémentaires

Exercice 35

Pour vous entraîner.

a) $]-\infty;3]$
b) $\left[-\frac{1}{12};+\infty\right[$
c) $\left[\frac{19}{7};+\infty\right[$
d) $]-\infty;-1]$

e) $\varnothing$
f) $\mathbb{R}$

g) $\mathbb{R}$
h) $]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$

i) $[-2;2]$
j) $]-1;1[$
k) $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$
l) $\left]-\sqrt{\sqrt{2}};\sqrt{\sqrt{2}}\right[$

m) $\left[-\frac{2}{3};0\right[\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$

n) $]-\infty;-1]\cup\left]\frac{1}{2};1\right]$

o) $]-\infty;0[\cup]1;3]$
p) $]-\infty;-2]\cup]-1;0]$
q) $]1;+\infty[\cup\{0\}$
r) $]-\infty;-1[\cup[0;1[$
s) $]-\infty;-2[\cup[0;5]$
t) $[-1;1]$

u) $]-1;+\infty[$

v) $[-1;1]\setminus\{0\}$
w) $[0;2[$

Encadrements

Exercice 36

$[-1/2\,;\,0]$

Rappelons que « $a < x < b$ » est un *encadrement*, qu'il peut se lire « *x est* strictement *compris entre a* et *b* » et qu'il signifie : $\begin{cases} a < x \\ x < b \end{cases}$

Dans cet exercice, on pourrait donc décomposer l'encadrement en un petit système d'inéquations. Mais parfois, on peut garder l'encadrement du début à la fin de la résolution, à la condition de faire en sorte de laisser x au milieu. Ici, en commençant par soustraire 1 à tous les membres.

Exercice 37

$-11 \leq 1-2a \leq -9$

Exercice 38

$0 \leq \dfrac{3-a}{2} \leq 2$

Exercice 39

Lire le paragraphe *Opérations membre à membre*

a) $7 \leq x+y \leq 9$
b) $10 \leq xy \leq 18$
c) $-4 \leq x-y \leq -2$

Exercice 40

a) $4 \leq ab \leq 10$
b) $-10 \leq ab \leq -4$

Exercice 41

C'est un exercice de réflexion, alors prenez le temps de réfléchir.

$-10 \leq ab \leq 5$ ou $-10 \leq ab \leq 7$ (ou autre ?)

Exercice 42

a) $3 \leq 2x-3y \leq 8$

b) $6 \leq xy \leq 12$

Exercice 43

Réponse non donnée.

Exercice 44

Réponse non donnée.

Exercice 45

Réponse non donnée.